The Journal of Symbolic Logic
Volume 5, Number 3, September 1940

# SUR LES TYPES DES PROPOSITIONS COMPOSÉES

G. PÓLYA

Il s'agit d'un problème combinatoire de logique formelle, formulé par Jevons;[1] il sera expliqué en détails dans ce qui suit (voir no. 1). Jevons lui-même n'a traité le problème que dans les cas les plus simples ($n = 1, 2, 3$); un cas plus difficile ($n = 4$) a été traité par Clifford;[2] le cas général ($n$ quelconque) a été à peine abordé.[3]

Le but de ce travail est de faire remarquer que ce problème de Jevons et de Clifford est contenu comme cas particulier dans un problème combinatoire général que j'ai traité ailleurs.[4] La méthode générale ramène le problème présent à l'étude d'un certain groupe de permutations d'ordre $n!2^n$, étroitement lié au groupe symétrique d'ordre $n!$. J'ai fait les calculs nécessaires pour $n = 1, 2, 3, 4$. Mes résultats numériques sont complètement en accord avec les résultats de Jevons, mais ils ne s'accordent qu'en partie avec les résultats de Clifford.

**1. Le problème.** Une proposition peut être vraie ou fausse. On peut exprimer la même chose en disant que nous pouvons attribuer à une proposition l'une ou l'autre des deux "valeurs logiques" qui s'excluent mutuellement: la "vérité" et la "fausseté."

Considérons $n$ propositions distinctes, $P_1, P_2, \cdots, P_n$. En attribuant à chacune de ces propositions une valeur logique déterminée, nous caractérisons la "situation logique des propositions $P_1, P_2, \cdots, P_n$" ou, exprimé plus brièvement, la *situation* de $P_1, P_2, \cdots, P_n$. On peut s'imaginer plusieurs situations différentes des mêmes propositions. On peut représenter une situation quelconque par un symbole de la forme $(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)$. Si $P_1$ est vraie $\epsilon_1 = 1$, si $P_1$ est fausse $\epsilon_1 = -1$; si $P_2$ est vraie $\epsilon_2 = 1$, si $P_2$ est fausse $\epsilon_2 = -1$; et ainsi de suite. On voit que le nombre des situations différentes possibles de $n$ propositions données est exactement $2^n$. En prenant $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ comme coordonnées rectangulaires dans un espace à $n$ dimensions, les situations possibles des

Received June 28, 1940.

[1] W. S. Jevons, *The principles of science* (London and New York, second edition, reprint 1892). Voir p. 134–146.

[2] W. K. Clifford, *Mathematical papers* (London 1882), p. 1–16.

[3] E. Schröder, *Algebra der Logik*, t. I, Anhang 6 (voir en particulier p. 659–683) traite le problème en détail et en donne une représentation géométrique importante qui sera utilisée dans ce qui suit. Schröder, voir p. 671, ne comprend pas tout à fait le point de vue de Jevons qui sera expliqué plus loin; voir no. 3, remarque 1, p. 102. Voir aussi A. Nagy, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. 5 (1894), p. 331-345; on y trouve quelques autres citations.

[4] G. Pólya, (a) *Zeitschrift für Kristallographie* (A), t. 93 (1936), p. 415–443; (b) *Acta mathematica*, t. 68 (1937), p. 145–254. Le travail (a) est plus détaillé en certains points, mais ne donne pas les démonstrations qui se trouvent en (b).



Downloaded from https://www.cambridge.org/core. University of Basel Library, on 11 Jul 2017 at 08:57:28, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.2307/2266862

propositions $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sont représentées par les $2^n$ sommets d'un hypercube à $n$ dimensions.

Nous dirons que la proposition $C$ est *composée* des propositions données $P_1, P_2, \cdots, P_n$, lorsque la connaissance de la situation des propositions $P_1, P_2, \cdots, P_n$ entraîne la connaissance de la vérité ou de la fausseté de la proposition $C$. [Voici un exemple d'une proposition composée de $P$ et de $Q$: "$P$ et $Q$ sont équivalentes." On peut exprimer la même proposition composée par les mots: "$P$ et $Q$ tiennent et tombent ensemble" ou par le symbole: "$P \sim Q$."[5] Cette proposition composée est vraie dans les situations (1, 1), (−1, −1) et fausse dans les situations (1, −1), (−1, 1).] Ayant compris une proposition $C$ composée de $P_1, P_2, \cdots, P_n$, nous pouvons dire dans chacune des $2^n$ situations possibles de $P_1, P_2, \cdots, P_n$ si $C$ est vraie ou fausse, donc nous pouvons attacher à chaque sommet de l'hypercube qui représente les situations possibles, soit la marque "vraie" soit la marque "fausse." Nous considérerons deux propositions composées qui engendrent la même distribution des marques "vraie" et "fausse" sur les $2^n$ situations (sur les $2^n$ sommets de l'hypercube) comme essentiellement indentiques. Ainsi le nombre des propositions essentiellement distinctes, composées de $n$ propositions données, est $2^{2^n}$; dans ce nombre sont comprises la proposition "identiquement vraie" et la proposition "identiquement fausse" (la première est toujours vraie, la seconde toujours fausse, quelle que soit la nature de $P_1, P_2, \cdots, P_n$).

Nous dirons que deux propositions $C'$ et $C''$ composées des mêmes propositions $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sont de même *type* lorsqu'on peut changer l'une en l'autre, en échangeant entre elles les propositions $P_1, P_2, \cdots, P_n$ d'une manière quelconque et en changeant certaines de ces propositions (un nombre quelconque entre 0 et $n$, limites comprises) en leur négation. [P.e. les deux propositions composées

"$P$ et $Q$ sont équivalentes (en symboles $P \sim Q$)"

"$P$ et $Q$ s'excluent mutuellement (en symboles $P \sim \bar{Q}$)"

sont différentes, mais du même type.—La proposition identiquement vraie et la proposition identiquement fausse sont de types différents.[6]] Le nombre des changements considérés est $n!2^n$; ils constituent un groupe de cet ordre. Ce groupe peut être considéré comme un groupe de permutations de degré $2^n$, puisqu'il échange entre eux $2^n$ éléments (les $2^n$ situations, les $2^n$ sommets de l'hypercube). Le même groupe peut être considéré comme le groupe de tous les mouvements (de première et de seconde espèce, rotations et rotations combinées de symétrie) qui ramènent l'hypercube considéré sur lui-même.

Une proposition composée est caractérisée par la distribution de $2^n$ marques de deux sortes ("vraie" et "fausse") sur les $2^n$ sommets de l'hypercube, considéré comme fixe dans l'espace. Mais considérons l'hypercube comme mobile, c.à.d. ne faisons pas de distinction entre ses différentes positions; en outre, ne faisons pas de distinction entre l'hypercube original et celui qui en

[5] J'écris les signes logiques à la manière adoptée par D. Hilbert et W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin 1928).

[6] Au cas $n=2$ on a 16 propositions composées de 6 types différents; voir l'énumeration complète à la fin du no. 2 (p. 101).

Downloaded from https:/www.cambridge.org/core. University of Basel Library, on 11 Jul 2017 at 08:57:28, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https:/www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.2307/2266862

dérive par une symétrie (par rapport à un plan passant par le centre et parallèle à l'une des faces). Ces distinctions négligées, deux distributions de marques, qui peuvent être changées l'une en l'autre par une des $n!2^n$ permutations considérées, deviendront indiscernables. Il nous restera exactement autant de distributions discernables qu'il y a de types différents de propositions composées de $n$ propositions distinctes données.

*Quel est le nombre $T_n$ de ces types différents?* Voilà une partie de notre problème. Notre but est de répondre à la question un peu plus précise que voici: *Quel est le nombre $N_n^{(s)}$ des types différents de propositions composées de $n$ propositions données, ces propositions composées étant telles qu'elles soient vraies en exactement $s$ situations?* (Observons que deux propositions composées de même type, $C'$ et $C''$, deviennent vraies dans d'autres situations peut-être, mais certainement dans le même nombre de situations.)

On a évidemment

$$T_n = N_n^{(0)} + N_n^{(1)} + N_n^{(2)} + \cdots + N_n^{(2^n)}. \tag{1}$$

On voit facilement (échanger les deux sortes de marques!) que

$$N_n^{(s)} = N_n^{(2^n-s)}. \tag{2}$$

**2. La solution.** En se servant de l'interprétation géométrique donnée, on obtiendra sans difficulté les nombres combinatoires cherchés $N_n^{(s)}$ pour $n = 1, 2, 3$. Il faut trouver intuitivement de combien de manières on peut peindre avec deux couleurs données (p.ex. rouge et blanc) les 2 bouts d'un segment rectiligne, les 4 coins d'un carré, les 8 sommets d'un cube, si deux manières de peindre, qui se ramènent l'une à l'autre par mouvement ou symétrie, sont considérées comme indiscernables. Mais cette méthode intuitive ne s'étend plus au cas $n = 4$.

J'ai exposé ailleurs (l.c. note 4) une méthode pour la solution d'un problème combinatoire plus général et j'ai donné de nombreuses applications particulières, dont plusieurs sont très voisines du problème qui nous occupe ici. Je ne reviendrai pas sur la méthode générale; je me bornerai à exposer l'algorithme précis qu'elle fournit pour le cas spécial $n = 2$ du problème présent, comme simple "recette," sans démonstration, mais j'énoncerai la "recette" de telle manière que son extension aux valeurs de $n$ différentes de 2 soit plausible.

1°. Il y a, le repos compris, $2!2^2 = 8$ mouvements différents (de première et de seconde espèce) qui ramènent un carré sur lui-même. Chacun de ces 8 mouvements occasionne une permutation des 4 sommets du carré. Décomposons chacune de ces 8 permutations de 4 éléments en un produit de cycles sans élément commun. Faisons correspondre à un cycle de $k$ éléments l'indéterminée $f_k$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$) et à chaque produit de cycles le produit des indéterminées correspondantes.

J'énumère les produits correspondants aux différentes sortes de mouvement:

$f_1^4$ repos (chaque sommet constitue un cycle);

$f_2^2$ rotation de 180°, l'axe normal au carré;

$f_4$ rotation de 90°, l'axe normal au carré;

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. University of Basel Library, on 11 Jul 2017 at 08:57:28, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.2307/2266862

$f_1^2f_2$ symétrie par rapport à une diagonale;

$f_2^2$ symétrie par rapport à une droite parallèle à deux côtés.

Les 2 premières sortes de mouvement ne sont réalisées qu'une fois, les 3 dernières chacune deux fois. Nous avons donc bien 8 mouvements (rotations et symétries) en tout. Nommons *indicateur des cycles* du groupe de permutations considéré la moyenne arithmétique des 8 produits obtenus:

$$\frac{f_1^4 + 3f_2^2 + 2f_4 + 2f_1^2f_2}{8}. \tag{3}$$

2°. Posons

$$f_k = 1 + x^k \tag{4}$$

($k = 1, 2, 3, \cdots$). Alors l'indicateur des cycles (3) devient un polynôme en $x$. Développons ce polynôme suivant les puissances croissantes de $x$. Dans ce développement, le *coefficient de $x^s$ vaut exactement $N_n^{(s)}$.*

J'écris le développement qu'on obtient de (3) en faisant la substitution (4) et en ordonnant l'expression suivant les puissances ascendantes de $x$. J'écris au-dessous de chaque terme les propositions différentes, composées des deux propositions données $P$ et $Q$, dont les types sont énumérés par le coefficient du terme; s'il y a plusieurs propositions du même type, elles sont réunies par une parenthèse; la proposition identiquement fausse est désignée par $O$, la proposition identiquement vraie par $I$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & x & + & 2x^2 & + & x^3 & + & x^4 \\
O & & \left\{\begin{matrix} P \,\&\, Q \\ P \,\&\, \bar{Q} \\ \bar{P} \,\&\, Q \\ \bar{P} \,\&\, \bar{Q} \end{matrix}\right\} & & \left\{\begin{matrix} P \\ Q \\ \bar{P} \\ \bar{Q} \end{matrix}\right\} & & \left\{\begin{matrix} P \vee Q \\ P \vee \bar{Q} \\ \bar{P} \vee Q \\ \bar{P} \vee \bar{Q} \end{matrix}\right\} & & I \\
 & & & & \left\{\begin{matrix} P \sim Q \\ P \sim \bar{Q} \end{matrix}\right\} & & & &
\end{array}$$

**3. Les résultats.** Par une extension plausible de ce qui précède, le problème de calculer les $2^n + 1$ nombres $N_n^{(0)}, N_n^{(1)}, \cdots, N_n^{(2^n)}$ peut être résolu en deux étapes (voir la démonstration l.c. note 4):

1°. Construire l'indicateur des cycles du groupe des permutations, d'ordre $n!2^n$ et de degré $2^n$, qui échange entre eux les $2^n$ sommets de l'hypercube, en faisant subir à celui-ci toutes les rotations et symétries qui le font coïncider avec lui-même.

2°. Dans l'indicateur des cycles construit, poser $f_k = 1 + x^k$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$) et trouver le coefficient de $x^s$ dans le développement: c'est le nombre $N_n^{(s)}$ cherché.

C'est seulement la première étape qui présente une difficulté non-triviale. Mais pour un $n$ donné, ce n'est qu'une question de patience de construire l'indicateur des cycles par le calcul effectif des $n!2^n$ substitutions et de leur décomposition en cycles. J'ai fait ce calcul pour $n = 1, 2, 3, 4$. En l'effectuant,

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. University of Basel Library, on 11 Jul 2017 at 08:57:28, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.2307/2266862

on trouve nombreuses simplifications que je ne mentionnerai pas ici. Je donne mes résultats en deux tableaux.

Dans le Tableau I, j'ai écrit chaque indicateur des cycles de manière à faire apparaître une certaine connexion avec l'indicateur des cycles (bien connu) du groupe symétrique correspondant—connexion qui paraît susceptible de généralisation.[7]

Les nombres du Tableau II sont à comparer aux résultats de Jevons et de Clifford; il convient de faire deux remarques:

1. Jevons ne s'occupe pas de toutes les propositions composées de $n$ propositions données $P_1, P_2, \cdots, P_n$ mais seulement de celles dont la vérité n'implique ni la vérité ni la fausseté d'aucune des propositions $P_1, P_2, \cdots, P_n$. (Les marques "vraie" et "fausse" sont distribuées sur les $2^n$ sommets de l'hypercube de manière qu'aucune des faces ne contienne toutes les marques "vraie.") Le nombre de ces propositions composées est inférieur à $2^n$; il est d'ailleurs exactement[8]

$$(-1)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}+k}.$$

Le nombre des types de ces propositions composées est

$$N_n^{(s)} - N_{n-1}^{(s)} \qquad \text{lorsque} \qquad s \leqq 2^{n-1},$$
$$N_n^{(s)} \qquad \text{lorsque} \qquad s > 2^{n-1}.$$

2. Clifford trouve, par une méthode laborieuse, les valeurs $N_4^{(6)} = 47$, $N_4^{(7)} = 55$, $N_4^{(8)} = 78$, tandis que je trouve les nombres 50, 56, 74. Des vérifications variées de mes calculs et l'uniformité de ma méthode me font croire que mes nombres sont justes.

Le problème des types des propositions composées a un certain intérêt pour l' "heuristique" comme j'aurai peut-être l'occasion de montrer ailleurs.

Nous nous sommes occupés du problème des types en nous mettant, naturellement, au point de vue de la logique classique; on pourrait le poser et le résoudre, en se servant de la même méthode générale, pour une logique à trois ou à plusieurs valeurs; mais je ne vois, en attendant, aucun intérêt à cette généralisation possible.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH

[7] Le groupe d'ordre $n!2^n$ des mouvements de l'hypercube qui échange entre eux les $2^n$ sommets de l'hypercube échange également entre elles les $2n$ faces de l'hypercube (ou, ce qui revient au même, les $2n$ sommets de l'hyperoctaèdre placés au milieu de ces faces) et occasionne ainsi un groupe de permutations d'ordre $n!2^n$ et de degré $2n$. La structure de ce dernier groupe peut être complètement caractérisée par le symbole $\mathfrak{S}_n[\mathfrak{S}_2]$ et, par conséquent, son indicateur des cycles peut être construit explicitement. Voir l.c., note 4, p. 178–180 et, pour l'exemple $n=3$, p. 213–214.

[8] 1, 7, 193, 63775 pour $n=1, 2, 3, 4$. Voir Jevons l.c. note 1.

Downloaded from https://www.cambridge.org/core. University of Basel Library, on 11 Jul 2017 at 08:57:28, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https://www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.2307/2266862

## TABLEAU I.

Indicateur des cycles du groupe d'ordre $n!2^n$ et de degré $2^n$ échangeant les $2^n$ sommets de l'hypercube ($n = 1, 2, 3, 4$).

$$\frac{f_1^2 + f_2}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f_1^4 + 3f_2^2}{2^2} + \frac{f_4 + f_1^2 f_2}{2}\right]$$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{f_1^8 + 7f_2^4}{2^3} + 2\frac{f_1^2 f_3^2 + f_2 f_6}{2} + 3\frac{(f_1^4 + f_2^2)f_2^2 + 2f_4^2}{2^2}\right]$$

$$\frac{1}{24}\left[\frac{f_1^{16} + 15f_2^8}{2^4} + 6\frac{f_1^8 f_2^4 + 3f_2^8 + 4f_4^4}{2^3} + 3\frac{f_1^4 f_2^6 + 3f_4^4}{2^2} + 8\frac{f_1^4 f_3^4 + 3f_2^2 f_6^2}{2^2} + 6\frac{f_1^2 f_2 f_4^3 + f_8^2}{2}\right]$$

## TABLEAU II.

$N_n^{(s)}$, nombre des types des propositions composées de $n$ propositions données, la proposition composée étant vraie en $s$ situations des propositions données.

| $N_n^{(s)}$ | $s = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $T_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | 6 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 | 1 | 1 | 22 |
| 4 | 1 | 1 | 4 | 6 | 19 | 27 | 50 | 56 | 74 | 402 |

Downloaded from https:/www.cambridge.org/core. University of Basel Library, on 11 Jul 2017 at 08:57:28, subject to the Cambridge Core terms of use, available at https:/www.cambridge.org/core/terms. https://doi.org/10.2307/2266862